Ueber

gewisse krumme Flächen,

welche

bei der Bewegung einer mit den Berührungsebenen einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung mit endlichem Mittelpunkt parallelen und durch einen festen Punkt gehenden Ebene erzeugt werden.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hochlöblicher philosophischer Facultät zu Marburg

eingereicht

von

Rudolf Heermann

aus Hersfeld.

MARBURG.

Druck von C. L. Pfeil.

1880.

§. 1.
Einleitung.

Gegeben sei eine auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogene Fläche zweiter Ordnung. Zu jeder Tangentenebene dieser Fläche werde durch einen Punkt (M) der XY-Ebene eine parallele Ebene gelegt, die gehörig ausgedehnt den positiven oder negativen Theil der Z-Axe durchschneidet. Trägt man nun jeden dieser Abschnitte der Z-Axe (vom Anfangspunkt 0 des Coordinatensystems an gerechnet) mit Berücksichtigung seines Vorzeichens auf der dem entsprechenden Berührungspunkte der tangirenden Ebene zugehörigen Z-Coordinate vom Fusspunkt letzterer aus ab, so ist der Ort aller Endpunkte dieser aufgetragenen Abschnitte eine krumme Fläche (F), deren Beschaffenheit für die verschiedenen Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung, bei denen der Mittelpunkt nicht auf der Fläche liegt, zu erforschen, der Zweck nachstehender Untersuchung ist.

Wir nehmen an, der Mittelpunkt der Fläche zweiter Ordnung falle mit dem Anfangspunkt des Coordinatensystems zusammen, während ihre Hauptaxen in die Richtungen der Coordinatenaxen fallen, so dass sich die Fläche zweiter Ordnung durch die Gleichung:

$$P_1x^2 + P_2y^2 + z^2 = K \tag{1}$$

darstellen lässt, worin P_1, P_2 und K reelle (positive oder negative) Constante sind und $P_1 \gtrless P_2$ vorausgesetzt wird. Der Punkt M möge die Coordinaten

$$x = -\xi,\ y = \eta,\ z = 0$$

haben. Aus der Gleichung

$$P_1x_1(x+\xi) + P_2y_1(y-\eta) + z_1z = 0$$

einer durch den Punkt M hindurchgehenden und zu der die Fläche (1) im Punkt (x_1, y_1, z_1) berührenden Ebene parallelen Ebene erhält man, indem man in der Gleichung

$$x = 0,\ y = 0$$

setzt, für die Länge der Z-Coordinate des Punktes der Fläche F, der dem Punkte (x_1, y_1, z_1) entspricht, den Ausdruck

$$z = \frac{P_2\eta y_1 - P_1\xi x_1}{z_1}.$$

Drückt man den Wert von z_1 gemäss der Gleichung (1) durch x_1 und y_1 aus und lässt man die Indices an x, y und z fort, durch die ein bestimmter Punkt der Fläche (1) hervorgehoben wird, so erhält man, nachdem man durch Quadriren das Wurzelzeichen entfernt hat, als Gleichung der Fläche F die Gleichung

$$(2) \qquad P_1x^2z^2 + P_2y^2z^2 - Kz^2 + (P_1\xi x - P_2\eta y)^2 = 0,$$

woraus folgt: Die Fläche F ist eine Fläche vierter Ordnung.

§. 2.

Vielfache Punkte und Curven.

Beziehen wir die Fläche F auf ein Polarcoordinatensystem, dessen Pol mit dem Ursprunge 0, dessen Polaraxe mit der Axe der x und dessen Grundebene mit der XY-Ebene zusammenfällt, so erhalten wir durch die Substitutionen

$$x = \varrho\cos\vartheta,\ y = \varrho\sin\vartheta\cos w,\ z = \varrho\sin\vartheta\sin w$$

aus der Gleichung (1) die Polargleichung der Fläche F:

$$(3) \quad \begin{cases} (P_1\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\sin^2\omega + P_2\sin^4\vartheta\sin^2\omega\cos^2\omega)\varrho^4 + \\ \left[(P_1\xi\cos\vartheta - P_2\eta\sin\vartheta\cos\omega)^2 - K\sin^2\vartheta\sin^2\omega\right]\varrho^2 = 0. \end{cases}$$

Da diese Gleichung kein Glied mit ϱ und kein absolutes Glied enthält, so schneidet jede Gerade, die durch den Anfangspunkt geht, die Fläche in zwei mit ihm zusammenfallenden Punkten, d. h.:

„Im Anfangspunkt der Coordinaten befindet sich ein Doppelpunkt der Fläche F."

Ferner muss es unter Geraden, die durch den Anfangspunkt gehen, solche geben, welche die Fläche in vier zusammenfallenden Punkten schneiden; denn die obige Gleichung geht über in

$$\varrho^4 = 0$$

sobald für ϑ und ω Werte eingesetzt werden, welche den Coefficienten von ϱ^2 zu Null machen. Schreibt man die Bedingung, welche die Coordinaten dieser Geraden erfüllen müssen, wieder in den ursprünglich benutzten cartesischen Coordinaten, so lautet sie

$$(P_1\xi x - P_2\eta y)^2 - Kz^2 = 0.$$

Dieses ist die Gleichung von zwei Ebenen:

$$(4) \qquad \begin{cases} P_1\xi x - P_2\eta y + z\sqrt{K} = 0 \\ P_1\xi x - P_2\eta y - z\sqrt{K} = 0. \end{cases}$$

Die Tangenten der Fläche F im Anfangspunkt der Coordinaten liegen also in zwei Ebenen, d. h.:

„Der Anfangspunkt der Coordinaten ist ein biplanarer Knotenpunkt der Fläche."

Jede durch eine solche Tangente hindurchgelegte Ebene schneidet aus der Fläche F eine Curve aus, bei der sich im Anfangspunkt der Coordinaten zwei Teile durchschneiden. Der eine wird von der Tangente in einem Punkte, der andere in drei auf einander folgenden Punkten geschnitten. Es fallen also für jeden Teil zwei auf einander folgende Tangenten in eine zusammen. Die Tangenten jeder derartigen Schnittcurve sind daher im Anfangspunkt stationäre Tangenten derselben und jeder Teil der Schnittcurve besitzt im Anfangspunkt der Coordinaten einen Inflexionspunkt. Daher kann man sagen:

„Die beiden Ebenen (4) sind stationäre Tangentenebenen der Fläche F und die beiden Theile der Fläche, die sich im Anfangspunkte durchdringen, besitzen in demselben einen Inflexionspunkt oder parabolischen Punkt."

Da eine Fläche vierter Ordnung mehr als einen Doppelpunkt besitzen kann, so haben wir die Fläche F in Bezug auf die Anzahl der Doppelpunkte resp. von mehrfachen Punkten näher zu untersuchen.

Wir bedienen uns einer in den Coordinaten homogenen Gleichung der Fläche, indem wir in der Gleichung (1) an die Stelle von x, y, z die bezüglichen Quotienten $\frac{x}{w}$, $\frac{y}{w}$, $\frac{z}{w}$ setzen, in denen w eine vierte Variable bezeichnet. Die Gleichung (1) nimmt dann die Gestalt an:

$$(5) \qquad P_1x^2z^2 + P_2y^2z^2 - Kz^2w^2 + w^2(P_1\xi x - P_2\eta y)^2 = 0$$

Bei der Entscheidung über sonstige vielfache Punkte der Fläche F benutzen wir den Satz, dass diese Punkte gemeinsame Punkte der Fläche F und der vier Flächen sein müssen, deren Gleichungen man erhält, wenn man jeden durch partielle Differentiation nach einer der vier Variablen erhaltenen Differentialquotienten der den linken Theil der Gleichung (5) bildenden Function gleich Null setzt, oder, anders ausgedrückt, wir suchen die Wertsysteme der Coordinaten, die der Gleichung (5) und den angegebenen vier andern Gleichungen zugleich genügen.

Als die einzigen Wertsysteme, welche die fünf Bedingungen erfüllen, erhalten wir leicht folgende drei:

$$(6) \qquad (d) \begin{Bmatrix} y = \frac{P_1\xi}{P_2\eta} x \\ z = 0 \end{Bmatrix}, \quad (d') \begin{Bmatrix} z = 0 \\ w = 0 \end{Bmatrix}, \quad (k) \begin{Bmatrix} x = 0 \\ y = 0 \\ w = 0 \end{Bmatrix}.$$

Von diesen stellt (d) eine in der XY-Ebene liegende Gerade dar, die durch den Ursprung geht und gegen die Axe der x unter einem Winkel $=$ arc tg $\frac{P_1\xi}{P_2\eta}$ geneigt ist. Das zweite Wertsystem (d') stellt die Schnittlinie der unendlich fernen Ebene mit der XY-Ebene dar. Das dritte (k) repräsentirt den Schnittpunkt der Z-Axe mit der unendlich fernen Ebene. Da die Derivirten höherer Ordnung durch Einsetzen eines der obigen Wertsysteme (6) nicht verschwinden, so haben wir das Resultat:

> „Die Fläche F besitzt zwei in einer Ebene liegende Doppelgerade — oder, was dasselbe ist, einen (in zwei Gerade degenerirten) Doppelkegelschnitt — und einen einzelnen Doppelpunkt.“

Die Fläche gehört somit zu der Classe von Flächen, für die Kummer*) die Gleichung

*) Monatsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften. Juli 1863. p. 324. und „Crelle's Journal.“ Bd. 64.

$$\varphi^2 = 4p^2\psi$$

als die allgemeinste Form ihrer Gleichung angibt. $\psi = 0$ bedeutet hier einen Kegel zweiten Grades und $\varphi = 0$ ist eine Gleichung zweiten Grades, die eine durch den Mittelpunkt des Kegels $\psi = 0$ hindurchgehende Fläche darstellt. Der Mittelpunkt dieses Kegels ist ein Doppelpunkt der Fläche und die Gleichungen $\varphi = 0$ und $p = 0$ stellen den Doppelkegelschnitt dar.

Ein Vergleich unserer Gleichung (4), wenn wir sie in der Form

$$w^2(P_1\xi x - P_2\eta y)^2 = (Kw^2 - P_1x^2 - P_2y^2)z^2$$

schreiben mit der von Kummer aufgestellten zeigt, dass sich folgende Gleichungen entsprechen:

$$\begin{aligned} (P_1\xi x - P_2\eta y)w &= 0 \text{ und } \varphi = 0 \\ P_1x^2 + P_2y^2 - Kw^2 &= 0 \text{ und } \psi = 0 \\ z &= 0 \text{ und } p = 0. \end{aligned}$$

Der Kegel $\psi = 0$ hat in unserem Falle seinen Mittelpunkt, den einzelnen Doppelpunkt der Fläche, im Unendlichen; er ist ein auf der XY-Ebene senkrecht stehender gerader Cylinder zweiten Grades, der zur Axe die Z-Axe hat.

Die Fläche zweiter Ordnung $\varphi = 0$ besteht aus den beiden Ebenen

$$P_1\xi x - P_2\eta y = 0 \text{ und } w = 0,$$

also aus einer durch die Doppelgerade d und die Z-Axe hindurchgehenden Ebene und der unendlich fernen Ebene. Beide Ebenen enthalten daher auch den Mittelpunkt des Kegels $\psi = 0$.

§. 3.

Einfache Gerade.

Wir wenden uns zu der mit der Frage nach der Anzahl der vielfachen Punkte und Curven in engster Verbindung stehenden Frage nach der Anzahl und Lage von einfachen Geraden auf der Fläche.

Es führt bei dieser Untersuchung die gewöhnliche Methode zum Ziel, nach der man die Bedingungsgleichungen aufsucht, welchen die Coefficienten in den beiden Gleichungen einer belie-

bigen Geraden genügen müssen, damit die Gleichung der Fläche, nachdem man aus ihr mit Hülfe der beiden Gleichungen der Geraden zwei Coordinaten eliminirt hat, unabhängig von dem Werte der dritten Coordinate erfüllt werde.

Auf diese Weise erhält man als die Gleichungen der geraden Linien, welche sich auf der Fläche befinden, folgende Gleichungen (7):

$$(g)\quad \begin{cases} x = \pm\eta \sqrt{\frac{P_2}{P_1}} \cdot V \\ y = \pm\xi \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} \cdot V, \end{cases}$$

wo $V = \frac{K}{P_1\xi^2 + P_2\eta^2}$ ist und nur die gleichen Vorzeichen zusammengehören.

Ferner:

$$(g')\quad \begin{cases} \begin{cases} x\sqrt{P_1}\,(\xi\sqrt{P_1} \pm \eta\sqrt{-P_2}) - z\sqrt{K} = 0 \\ y\sqrt{-P_2}\,(\xi\sqrt{P_1} \pm \eta\sqrt{-P_2}) - z\sqrt{K} = 0 \end{cases} \\ \text{und} \\ \begin{cases} x\sqrt{P_1}\,(\xi\sqrt{P_1} \pm \eta\sqrt{-P_2}) + z\sqrt{K} = 0 \\ y\sqrt{-P_2}\,(\xi\sqrt{P_1} \pm \eta\sqrt{-P_2}) + z\sqrt{K} = 0, \end{cases} \end{cases}$$

worin immer nur zwei gleiche Vorzeichen zusammen zu nehmen sind.

Drittens:

$$(g'')\quad \begin{cases} \left.\begin{aligned} \xi y + \eta x \pm \sqrt{\frac{K(P_1\xi^2 + P_2\eta^2)}{P_1 P_2}} &= 0 \\ z + \sqrt{-(P_1\xi^2 + P_2\eta^2)} &= 0 \end{aligned}\right\} \\ \text{und} \\ \left.\begin{aligned} \xi y + \eta x \pm \sqrt{\frac{K(P_1\xi^2 + P_2\eta^2)}{P_1 P_2}} &= 0 \\ z - \sqrt{-(P_1\xi^2 + P_2\eta^2)} &= 0. \end{aligned}\right\} \end{cases}$$

Endlich:

$$(g''')\quad \begin{cases} y = \pm x\sqrt{-\frac{P_1}{P_2}} \\ w = 0. \end{cases}$$

„Die Fläche F enthält daher zwölf einfache Gerade."

Die beiden Geraden g liegen senkrecht zur XY-Ebene und schneiden auf der Doppelgeraden d zu beiden Seiten des Ursprungs zwei gleiche Strecken von der Grösse $\sqrt{\frac{V(P_1^2\xi^2+P_2^2\eta^2)}{P_1P_2}}$ ab.

Die vier Geraden g' gehen sämmtlich durch den Anfangspunkt der Coordinaten. Je zwei auf entgegengesetzten Seiten der Z-Axe liegende Gerade bilden mit dieser gleiche Winkel, nämlich die erste und dritte, und die zweite und vierte in der obigen Reihe.

Die vier Geraden g'' sind sowohl der XY-Ebene als einander parallel. Die Ebene, welche man durch die beiden ersten der Geraden g'' legen kann, ist parallel der durch die beiden letzten hindurchgelegten; ferner sind auch die durch die erste und die dritte Gerade einerseits und durch die zweite und vierte Gerade andererseits hindurchgelegten beiden Ebenen einander parallel. Zwei einander parallele Ebenen haben gleiche Abstände vom Anfangspunkt der Coordinaten.

Die Geraden g''' gehen durch den unendlich fernen Doppelpunkt der Fläche. Ihre Gleichungen erhält man auch, wenn man in der Glg. (5) der Fläche F $w=0$ setzt. Sie bilden daher die Schnittcurve der Fläche mit der unendlich fernen Ebene.

Da die Geraden g und g''' durch einen Doppelpunkt der Fläche hindurchgehn, so sind sie binäre Gerade*) d. h. solche, welche je zwei Gerade der allgemeinen Fläche vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt vertreten. Zählen wir nun jede doppelt, so erhalten wir als die Zahl der einfachen Geraden der Fläche vierter Ordnung die Zahl 16, übereinstimmend mit der allgemeinen Theorie der Flächen vierter Ordnung mit zwei sich durchschneidenden Doppellinien**).

Aus den Gleichungen (7) ist ersichtlich, dass, je nachdem die Grössen P_1, P_2 und K positiv oder negativ sind, die einfachen Geraden der Fläche bald reell und bald imaginär sind.

*) Vgl. „Mathem. Annalen", Bd. 4, p. 267.
**) Vgl. Salmon-Fiedler. Anal. Geom. d. Raumes. Bd. 2. p. 389.

Untersuchen wir unter welchen Bedingungen die einzelnen Geraden reell sind, so ergibt sich Folgendes:

1) Die mit demselben Buchstaben bezeichneten Geraden sind bei einer und derselben Fläche entweder sämmtlich reell oder sämmtlich imaginär.

2) Die Geraden g sind nur reell: α) wenn der Ausdruck V positiv ist und zugleich P_1 und P_2 gleiche Vorzeichen haben; β) wenn V negativ ist und P_1 und P_2 entgegengesetzte Vorzeichen haben.

3) Die Geraden g' sind nur reell, wenn K positiv ist und zugleich P_1 und P_2 entgegengesetzte Vorzeichen haben.

4) Die geraden g'' sind nur reell, wenn die Ausdrücke $(P_1\xi^2 + P_2\eta^2)$ und $\frac{K}{P_1P_2}$ beide negativ sind.

5) Die Geraden g''' sind nur reell, wenn P_1 und P_2 entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Wir berücksichtigen hier, wie in der weiteren Untersuchung, sieben verschiedene Gleichungen der Originalfläche zweiter Ordnung, welche Gleichungen man erhält, wenn man jeder der drei Grössen P_1, P_2 und K alle möglichen Vorzeichen beilegt und die Gleichung unberücksichtigt lässt, der keine reelle Fläche entspricht.

Wir stellen diese Fälle hier zusammen mit gleichzeitiger Angabe der entsprechenden Fläche zweiter Ordnung. Dieselben sind:

P_1	P_2	K	Die Fläche (1) ist ein
pos.	pos.	pos.	Ellipsoid
neg.	neg.	neg.	Hyperboloid mit einem Mantel, dessen reelle Axen in der XY-Ebene liegen.
pos.	neg.	pos.	Hyperboloid mit einem Mantel, dessen reelle Axen in der XZ-Ebene liegen.
neg.	pos.	pos.	Hyperboloid mit einem Mantel, dessen reelle Axen in der YZ-Ebene liegen.
neg	pos.	neg.	Hyperboloid mit zwei Mänteln, dessen reelle Axe mit der X-Axe zusammenfällt.
pos.	neg.	neg.	Hyperboloid mit zwei Mänteln, dessen reelle Ave mit der Y-Axe zusammenfällt.
neg.	neg.	pos.	Hyperpoloid mit zwei Mänteln, dessen reelle Axe mit der Z-Axe zusammenfällt.

Wendet man auf die verschiedenen Flächen F dieser Flächen zweiter Ordnung das oben über die Realität der einzelnen Geraden Gesagte an, so ergibt sich Folgendes:

Es enthält an einfachen Geraden die Fläche F des Ellipsoids nur die Geraden g;

des Hyperboloids mit einem Mantel, wenn dessen reelle Axen in der XY-Ebene liegen, die Geraden g und g'';

wenn dessen reelle Axen in der XZ- oder YZ-Ebene liegen, die Geraden g' und g'''; ausserdem noch g und g'', wenn die Coordinaten (ξ,η) des Punktes M der Bedingung $P_1\xi^2+P_2\eta^2<0$ genügen;

des Hyperboloids mit zwei Mänteln, wenn dessen reelle Axe mit der Axe der x oder der y zusammenfällt, die Geraden g''', ausserdem noch g, wenn $P_1\xi^2+P_2\eta^2\geqq 0$ ist; wenn dessen reelle Axe mit der Z-Axe zusammenfällt und zugleich $P_1\xi^2+P_2\eta^2\geqq 0$ ist, die Linien g, sonst gar keine Gerade.

§. 4.

Pole und Polaren.

Da sich die Gleichungen der Polaren eines Punktes in Bezug auf die Fläche wesentlich vereinfachen, wenn man ein Coordinatensystem zu Grunde legt, dessen eine Axe die Doppelgerade d ist, so denken wir uns die Axe der z als eine Drehungsaxe und das Coordinatensystem um einen Winkel $=$ arc. tg. $\frac{P_1\xi}{P_2\eta}$ gedreht, während der Anfangspunkt der Coordinaten seine Lage beibehält. Die auf dieses neue Coordinatensystem bezogene Fläche F erhält dann die Gleichung, welche für homogene Coordinaten lautet:

$$(8)\qquad Qx^2z^2+Ry^2z^2-2Sxyz^2-Tz^2w^2+y^2w^2=0,$$

wo die Coefficienten folgende Werte haben:

$$(9)\quad \begin{cases} Q=\dfrac{P_1P_2(P_1\xi^2+P_2\eta^2)}{(P_1^2\xi^2+P_2^2\eta^2)^2}\,, & R=\dfrac{P_1^3\xi^2+P_2^3\eta^2}{(P_1^2\xi^2+P_2^2\eta^2)^2} \\ S=\dfrac{P_1P_2(P_1-P_2)\xi\eta}{(P_1^2\xi^2+P_2^2\eta^2)^2}\,, & T=\dfrac{K}{P_1^2\xi^2+P_2^2\eta^2} \end{cases}$$

I. Die erste Polare.

Sind (x_1, y_1, z_1, w_1) die homogenen Coordinaten eines Punktes, so ist die Gleichung der ersten Polare desselben in Bezug auf die Fläche F:

$$(10)\quad \begin{cases} (Qx^2+Ry^2-2Sxy-Tw^2)z_1z+(Qx_1-Sy_1)xz^2 \\ -(Sx_1-Ry_1)yz^2+(y^2-Tz^2)w_1w+y_1yw^2=0. \end{cases}$$

Geht man mittelst der Substitutionen

$$w_1=1\,,\quad w=1$$

zu cartesischen Coordinaten über, so nimmt die Glg. (10) die Gestalt an

$$(10a)\quad \begin{cases} (Qx^2+Ry^2-2Sxy-T)z_1z+(Qx_1-Sy_1)xz^2 \\ -(Sx_1-Ry_1)yz^2+y^2-Tz^2+y_1y=0. \end{cases}$$

Hieraus folgt: Die erste Polare eines Punktes in Bezug auf die Fläche F ist eine Fläche dritter Ordnung, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten hindurchgeht Sie enthält die Doppelgerade d $(y=0,\ z=0)$ und die Doppelgerade d' $(z=0,\ w=0)$ als einfache Gerade, den Doppelpunkt k $(x=0,\ y=0,\ w=0)$ als einen einfachen Punkt.

α) Für $z=0$ geht die Gleichung (10) über in

$$(w_1y_1+y_1w)yw=0$$

d. h.: Der Schnitt der ersten Polare mit der XY-Ebene besteht aus drei Geraden: den beiden Linien d und d' und einer Geraden, die auf einer anderen Seite der XZ-Ebene liegt als der Pol und, parallel zur X-Axe verlaufend, von derselben einen Abstand hat, der gleich der Y-Coordinate des Poles ist.

Die letzte Gleichung ist unabhängig von x_1 und z_1; daher haben wir den Satz:

„Bewegt sich der Pol auf einer zur XZ-Ebene parallelen Ebene, so geht die erste Polare stets durch drei feste Gerade der XY-Ebene. Bewegt sich der Pol auf der XZ-Ebene selbst, so fällt die dritte Gerade mit der Linie d zusammen.“

β) Für $y=0$ zerfällt die Gleichung (10a) in die beiden Gleichungen:

$$Qz_1x^2+(Qx_1-Sy_1)xz-Tz-Tz_1=0$$
$$z=0.$$

Der Schnitt der ersten Polare eines Punktes mit der XZ-Ebene besteht aus der Geraden d und einem Kegelschnitt. Die Art des Kegelschnitts hängt ab von dem Vorzeichen des Ausdrucks: (Qx_1-Sy_1); daher folgt:

„Die ersten Polaren aller Punkte der Ebene

$$y=\frac{Q}{S}x$$

werden von der XZ-Ebene in Parabeln geschnitten; die ersten Polaren aller anderen Punkte in Hyperbeln mit Ausnahme der Punkte der XY-Ebene, für die der Kegelschnitt in zwei Gerade

$$x=\frac{T}{Qx_1-Sy_1} \text{ und } z=0$$

zerfällt. Erstere rückt in's Unendliche, wenn der Pol auf der Geraden $(y=\frac{Q}{S}x,\ z=0)$ liegt.“

γ) Für $x=0$ erhält man aus der Gleichung (10a) die Gleichung:

$$(Ry^2-T)z_1z-(Sx_1-Ry_1)yz^2+y^2-Tz^2+y_1y=0.$$

„Die YZ-Ebene schneidet die erste Polare eines Punktes in einer Curve dritter Ordnung, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten hindurchgeht und die Axen der y und der z in je einem Punkte schneidet, dessen Abstand vom Ursprung gleich der negativen Y- resp. Z-Coordinate des Poles ist.“

Liegt der Pol auf der Geraden

$$y = \frac{S}{R}x,\ z = 0$$

dann zerfällt die Curve dritter Ordnung in die unendlich ferne Gerade der YZ-Ebene und einen Kegelschnitt, der eine Hyperbel ist, wenn T positiv; eine Ellipse, wenn T negativ ist.

δ) Setzt man in der Gleichung (10)

$$y_1 = 0,\ z_1 = 0,$$

so nimmt sie die einfache Form an:

$$(Qx_1xz^2 - Sx_1yz^2 + (y^2 - Tz^2)w_1w = 0.$$

Dieser Gleichung sowie den vier Gleichungen, welche man erhält, indem man die nach den einzelnen Variablen dieser Gleichung genommenen Differentialquotienten gleich Null setzt, genügt das Wertsystem

$$y = 0,\ z = 0$$

Daraus folgt:

Die erste Polare eines Punktes der Doppellinie d ist eine Fläche dritter Ordnung mit einer Doppelgeraden und da jede diese Gerade enthaltende Ebene die Fläche ausser ihr nur in einer Geraden schneiden kann, so ergibt sich ferner:

„Die erste Polare eines Punktes der Doppellinie d ist eine Regelfläche dritter Ordnung."

Das Paar der Tangentenebenen an die Regelfläche in einem Punkte $(x', 0, 0)$ der Doppellinie wird durch die Gleichung:

$$(Qx_1x' - T)z^2 + y^2 = 0$$

dargestellt. Durch Aenderung des Wertes von x' erhält man das bei solchen Flächen bekanntlich auftretende involutorische Ebenenbüschel, in welchem das Paar der Tangentenebenen eines Punktes ein Paar von conjugirten Ebenen ist.

Für $x' = \frac{T}{Qx_1}$ fallen die beiden Tangentenebenen zusammen; die Fläche dritter Ordnung hat in diesem Punkte einen Cuspidalpunkt, dessen Entfernung vom Anfangspunkt der Coordinaten um so grösser ist, je näher der Pol der YZ-Ebene liegt.

Die Reciprokalfläche dieser Regelfläche ist von der dritten Ordnung d. h.:

„Die erste Polare eines Punktes der Doppellinie d ist eine Regelfläche dritter Classe."

ε) Für $x_1=0$, $y_1=0$, $z_1=0$ geht die Gleichung (10) über in

$$(y^2-Tz^2)w=0.$$

Die erste Polare des Anfangspunktes der Coordinaten besteht aus drei Ebenen. Ihre Gleichungen sind:

$$y=\pm z\sqrt{T} \text{ und } w=0.$$

Die beiden ersten Ebenen gehen durch die X-Axe und bilden mit der XZ-Ebene gleiche Neigungswinkel, die dritte ist die unendlich ferne Ebene.

Reell sind die beiden erstgenannten Ebenen jedoch nur, wenn T positiv ist, was sich ereignet, wenn K positiv ist; daher sind sie, wenn wir die oben genannten sieben Fälle berücksichtigen, nur reell bei der Fläche F des Ellipsoids, des Hyperboloids mit einem Mantel, dessen reelle Axen in der XZ-Ebene oder in der YZ-Ebene liegen, und des Hyperboloids mit zwei Mänteln, dessen reelle Axe mit der Axe der z zusammenfällt.

ζ) Setzt man in der Gleichung (10)

$$z_1=0,\ w_1=0.$$

so verwandelt sie sich in

$$(Qx_1-Sy_1)xz^2-(Sx_1-Ry_1)yz^2+y_1yw^2=0.$$

In ähnlicher Weise wie bei der ersten Polare eines Punktes der Doppellinie d folgt aus der letzten Gleichung:

„Die erste Polare eines Punktes der Doppellinie d' ist eine Regelfläche dritter Ordnung und dritter Classe, die jene Doppellinie ebenfalls zur Doppellinie hat."

Die Polare geht durch die Axen der x und der z hindurch. Ihr Schnitt mit einer der Coordinatenebenen besteht aus drei Geraden.

η) Für $x_1=0$, $y_1=0$, $w_1=0$, $w=1$ geht die Gleichung (10) über in:

$$(Qx^2 + Ry^2 - 2Sxy - T)z = 0.$$

Daraus folgt: Ist der einzelne Doppelpunkt der Fläche der Pol, so zerfällt die erste Polare in die XY-Ebene und einen Cylinder zweiten Grades. Dieser Cylinder steht senkrecht zur XY-Ebene und hat als ebenen Querschnitt einen Kegelschnitt, dessen Gattung durch den Wert des Ausdrucks: $(S^2 - QR)$ bestimmt wird. Vermittelst der Gleichungen (9) findet man

$$S^2 - QR = \frac{-P_1 P_2}{(P_1^2\xi^2 + P_2^2\eta^2)^2}.$$

Da hierin der Nenner stets positiv ist (so lange ξ und η von Null verschieden sind), so folgt: Der Cylinder ist ein elliptischer, wenn P_1 und P_2 das nämliche Vorzeichen haben, ein hyperbolischer, wenn ihre Vorzeichen entgegengesetzt sind — ein Resultat, das mit Rücksicht auf die diesen Werthen von P_1 und P_2 entsprechenden Originalflächen zweiter Ordnung sich auch so aussprechen lässt:

„Der Cylinder zweiten Grades, welcher einen Teil der ersten Polare des einzelnen Doppelpunktes bildet, ist ein elliptischer Cylinder, wenn die Fläche F abgeleitet ist von einem Ellipsoid, oder einem Hyperboloid mit einem Mantel, dessen reelle Axen in der XY-Ebene liegen, oder einem Hyperboloid mit zwei Mänteln, dessen reelle Axe mit der Z-Axe zusammenfällt; der Cylinder ist ein hyperbolischer bei der Fläche F des Hyperboloids mit einem Mantel, dessen reelle Axen in der XZ- oder YZ-Ebene liegen, und des Hyperboloids mit zwei Mänteln, dessen reelle Axe mit der Axe der x oder der y zusammenfällt."

9) Für $Qx_1 - Sy_1 = 0$, $z_1 = 0$, $w_1 = 0$ lautet die Gleichung (10):

$$[(Sx_1 - Ry_1)z^2 - y_1 w^2]y = 0.$$

Ist der Pol der Schnittpunkt der unendlich fernen Ebene mit der Geraden

$$y = \frac{Q}{S}x, \quad z = 0,$$

dann zerfällt die erste Polare in die XZ-Ebene und zwei zur XY-Ebene parallele Ebenen, die zu beiden Seiten derselben um

die Strecke $\sqrt{\frac{y_1}{Sx_1 - Ry_1}} = \sqrt{\frac{Q}{S^2 - QR}}$ von ihr abstehen.

II. Die zweite Polare.

Hat ein Punkt die homogenen Coordinasen (x_1, y_1, z_1, w_1), so ist die Gleichung der zweiten Polare desselben in Bezug auf die Fläche F

$$(11)\quad \begin{cases} Qz_1^2.x^2 - 2Sz_1^2.xy + (Rz_1^2 + w_1^2).y^2 + 4(Qx_1 - Sy_1)z_1.xz \\ -4(Sx_1 - Ry_1)z_1.yz + (Qx_1^2 + Ry_1^2 - 2Sx_1y_1 - Tw_1^2).z^2 \\ +4y_1w_1.yw - 4Tz_1w_1.zw + (y_1^2 - Tz_1^2)w^2 = 0 \end{cases}$$

oder in cartesischen Coordinaten:

$$(11a)\quad \begin{cases} Qz_1^2.x^2 - 2Sz_1^2.xy + (Rz_1^2 + 1)y^2 + 4(Qx_1 - Sy_1)z_1.xz \\ -4(Sx_1 - Ry_1)z_1.yz + (Qx_1^2 + Ry_1^2 - 2Sx_1y_1 - T)z^2 \\ +4y_1.y - 4Tz_1.z + y_1^2 - Tz_1^2 = 0. \end{cases}$$

Die zweite Polare ist je nach der Lage des Poles bald eine Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung, bald ohne endlichen Mittelpunkt. Die Complicirtheit der mit der Null verglichenen Function gestattet jedoch nicht die Gleichung (11) in anschaulicher Weise zu discutiren. Deshalb beschränke ich mich auf die Erörterung einiger interessanter, specieller Fälle derselben.

α) Setzen wir in der Gleichung (11a) $z_1 = 0$, so geht sie über in $y^2 + (Qx_1^2 + Ry_1^2 - 2Sx_1y_1 - T)z^2 + 4y_1y + y_1^2 = 0$.

Die zweite Polare eines Punktes der XY-Ebene ist ein gerader Cylinder zweiten Grades, dessen Axe parallel zur Axe der x ist. Der Cylinder ist für

$$Qx_1^2 + Ry_1^2 - 2Sx_1y_1 - T > 0$$

ein elliptischer; für

$$Qx_1^2 + Ry_1^2 - 2Sx_1y_1 - T < 0$$

ein hyperbolischer; er zerfällt für

$$Qx_1^2 + Ry_1^2 - 2Sx_1y_1 - T = 0$$

in zwei Ebenen.

Betrachtet man in der letzten Gleichung x_1 und y_1 als Variable, so ist die dieser Relation entsprechende Curve ein Kegelschnitt und zwar derselbe, dessen Beschaffenheit wir im ersten Teile

dieses §. bei der Untersuchung des unter η) befindlichen Cylinders kennen gelernt haben.

Danach können wir den Satz aussprechen:

„Die quadratische Polare eines Punktes der Ebene der beiden Doppelgeraden zerfällt in zwei Ebenen, wenn der Pol ein Punkt des in jener Ebene liegenden Kegelschnitts:

$$Qx^2 + Ry^2 - 2Sxy - T = 0$$

ist; sie ist ein elliptischer Cylinder, wenn der Pol mit (wenigstens) einem Brennpunkt auf derselben Seite des Kegelschnitts liegt; die Polare ist ein hyperbolischer Cylinder, wenn der Pol und die Brennpunkte des Kegelschnitts auf entgegengesetzten Seiten des letzteren liegen."

β) Es sei $y_1 = 0$, $z_1 = 0$ in (11a), dann ist diese Gleichung:

$$y^2 + (Qx_1^2 - T)z^2 = 0$$

d. h. verlegt man den Pol in die Doppelgerade d, so degenerirt die quadratische Polare in die beiden Ebenen, welche die Fläche im Pol berühren.

In Betreff der Realität dieser Ebenen ergibt sich Folgendes:

a) Wenn sowohl Q als T positiv ist, sind die Ebenen für alle zwischen

$$x_1 = +\sqrt{\frac{T}{Q}} \text{ und } x = -\sqrt{\frac{T}{Q}}$$

liegenden sowie für die diesen Grenzwerten entsprechenden Pole reell, während sie für Pole, die ausserhalb dieser Grenzwerte liegen, imaginär sind.

b) Wenn sowohl Q als T negativ ist, sind die Ebenen für alle zwischen obigen Grenzen liegenden Pole imaginär, für die diesen Grenzwerten entsprechenden und die ausserhalb der Grenzen liegenden Pole dagegen reell

c) Ist Q negativ und T positiv, dann sind die Tangentenebenen in jedem Punkte der Doppellinie d reell.

d) Ist Q positiv und T negativ, so sind die Ebenen in jedem Punkt der Doppellinie imaginär.

Unter welchen Bedingungen Q und T positiv oder negativ sind, ersieht man aus den Gleichungen (9), aus denen folgt:

Q ist positiv

1) wenn P_1 und P_2 positiv sind;

2) wenn P_1 positiv, P_2 negativ und $P_1\xi^2+P_2\eta^2<0$ ist;

3) wenn P_1 negativ, P_2 positiv und $P_1\xi^2+P_2\eta^2<0$ ist.

$Q=0$, wenn $P_1\xi^2+P_2\eta^2=0$ ist.

Q ist negativ

1) wenn P_1 und P_2 negativ sind;

2) wenn P_1 positiv, P_2 negativ und $P_1\xi^2+P_2\eta^2>0$ ist;

3) wenn P_1 negativ, P_2 positiv und $P_1\xi^2+P_2\eta^2>0$ ist.

T hat dasselbe Vorzeichen wie K.

Hieraus folgt:

a) „Wenn die Originalfläche ein Ellipsoid ist oder ein Hyperboloid mit einem Mantel, dessen reelle Axen in der XZ- oder der YZ-Ebene liegen, und ist im letzten Falle zugleich die Bedingung $P_1\xi^2+P_2\eta^2<0$ von den Coordinaten (ξ, η) des Punktes M erfüllt, dann schneidet jede Ebene, welche die Doppelgerade d zwischen den beiden oben angegebenen Grenzpunkten trifft, die Fläche F in einer Curve mit reellem Knotenpunkt, während für alle andern Schnitte die Linie d einen conjugirten Punkt der Schnittcurve bestimmt."

b) „Ist dagegen die Originalfläche ein Hyperboloid mit einem Mantel, dessen reelle Axen in der XY-Ebene liegen, oder ein Hyperboloid mit zwei Mänteln, dessen reelle Axe mit der Axe der x oder der y zusammenfällt und ist im zweiten Falle zugleich $P_1\xi^2+P_2\eta^2>0$, dann schneidet jede Ebene, welche die Doppelgerade d in der Strecke zwischen den beiden Grenzpunkten trifft, die Fläche F in einer Curve mit einem isolirten Doppelpunkt, während die Gerade für alle andern Schnitte einen reellen Knotenpunkt bestimmt."

c) „Die Doppelgerade d liegt ihrer ganzen Länge nach als reelle Gerade in der Fläche, wenn die Originalfläche ein Hyperboloid mit einem Mantel ist, dessen reelle Axen in der XZ- oder YZ-Ebene liegen, und zugleich $P_1\xi^2+P_2\eta^2\geq 0$ ist oder wenn die Grundfläche ein Hyperboloid mit zwei Mänteln ist, dessen reelle Axe mit der Axe der z zusammenfällt."

d) „Jeder Punkt der Doppellinie ist ein isolirter Punkt, wenn die Fläche F von einem Hyperboloid mit zwei Mänteln

abgeleitet ist, dessen reelle Axe mit der Axe der x oder y zusammenfällt und zugleich $P_1\xi^2 + P_2\eta^2 \leqq 0$ ist."

3) Ist $x_1 = \pm\sqrt{\frac{T}{Q}}$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, so ist die Gleichung der entsprechenden zweiten Polare

$$y^2 = 0$$

„Die beiden Punkte, welche die reellen und isolirten Theile der Doppelgeraden d von einander trennen, sind zwei Pinch- oder Cuspidalpunkte. Die Tangentenebenen in ihnen fallen mit der XZ-Ebene zusammen."

4) Setzt man in (11) $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, $w_1 = 0$, dann geht diese Gleichung in

$$z^2 = 0$$

über, d. h. in dem Schnittpunkt der beiden Doppellinien fallen die beiden Tangentenebenen mit der XY-Ebene zusammen oder

„Die Ebene der Doppelgeraden ist in dem (unendlich fernen) Schnittpunkt derselben, dem Doppelpunkt des Doppelkegelschnitts, gemeinsame Tangentenebene zweier sich in diesem Punkte berührender Mäntel der Fläche."

ε) Für $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$ verwandelt sich (11a) in

$$y^2 - Tz^2 = 0.$$

Ein Vergleich dieser Gleichung mit der im ersten Teile dieses §. unter ε) angeführten lehrt:

„Die Tangentenebenen im Anfangspunkt der Coordinaten sind zwei von den drei Ebenen, in welche die erste Polare des Ursprungs zerfällt."

In Betreff der Realität dieser Ebenen bei den verschiedenen Flächen F kann ich daher auf das dort Gesagte verweisen.

ζ) Setzt man in der Gleichung (11) $z_1 = 0$, $w_1 = 0$, so geht sie in

$$(Qx_1^2 + Ry_1^2 - 2Sx_1y_1)z^2 + y_1^2w^2 = 0$$

über, d. h.:

„Die Tangentenebenen in einem Punkte der Doppellinie d' stellen sich als zwei zur XY-Ebene parallele Ebenen dar, die beiderseits den gleichen Abstand $\frac{y_1}{\sqrt{(2Sx_1y_1 - Qx_1^2 - Ry_1^2)}}$ von der XY-Ebene haben."

η) Für $Qx_1^2 + Ry_1^2 - 2Sx_1y_1 = 0$, $z_1 = 0$, $w_1 = 0$ wird die Gleichung der Polare

$$w^2 = 0.$$

Beachtet man, dass die Gleichung

$$Qx^2 + Ry^2 - 2Sxy = 0$$

aus der Gleichung (8) der Fläche erhalten wird, wenn man in derselben $w = 0$ setzt, so folgt:

„Die beiden Punkte, in denen die Schnittlinien der Fläche mit der unendlich fernen Ebene die Doppelgerade d' treffen, sind zwei Cuspidalpunkte der letzteren. Die Tangentenebenen in einem dieser Punkte fallen mit der unendlich fernen Ebene zusammen."

Die Gerade d' liegt nur mit den Punkten als reelle Gerade in der Fläche, deren Coordinaten der Bedingung

$$Qx^2 + Ry^2 - 2Sxy \leqq 0$$

genügen.

Die Cuspidalpunkte sind reell, wenn die unendlich fernen Geraden (g''') der Fläche reell sind. Nach §. 3, 5. finden sich daher auf der Geraden d' reelle Cuspidalpunkte bei der Fläche F des Hyperboloids mit einem Mantel, wenn dessen reelle Axen in der XZ- oder YZ-Ebene liegen, und des Hyperboloids mit zwei Mänteln, dessen relle Axe mit der Axe der x oder der y zusammenfällt.

ϑ) Schliesslich setzen wir in der Gleichung (11) noch $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $w_1 = 0$, $w = 1$. Dadurch wird sie

$$Qx^2 + Ry^2 - 2Sxy - T = 0.$$

Ein Vergleich dieser Gleichung mit der im ersten Teile dieses §. unter η) befindlichen lehrt:

„Der Ort der Tangenten der Fläche in dem einzelnen Doppelpunkt (K) der Fläche ist ein Cylinder und zwar derselbe Cylinder, welcher einen Teil der ersten Polare des Doppelpunktes bildet."

Ferner ergibt sich, da der Ort der Tangenten im Doppelpunkt ein Kegel (mit unendlich fernem Mittelpunkt) ist:

„Der einzelne Doppelpunkt der Fläche ist ein gewöhnlicher Knotenpunkt."

III. Die dritte Polare.

Die dritte Polare eines Punktes (x_1, y_1, z_1, w_1) hat die homogene Gleichung:

$$(12)\quad \begin{cases} (Qx_1 - Sy_1)z_1^2.x - [(Sx_1 - Ry_1)z_1^2 - y_1w_1^2]y + \\ (Qx_1^2 + Ry_1^2 - 2Sx_1y_1 - Tw_1^2)z_1z + (y_1^2 - Tz_1^2)w_1.w = 0. \end{cases}$$

Dieselbe lautet in cartesischen Coordinaten geschrieben:

$$(12a)\quad \begin{cases} (Qx_1 - Sy_1)z_1^2.x - [(Sx_1 - Ry_1)z_1^2 - y_1]y + \\ (Qx_1^2 + Ry_1^2 - 2Sx_1y_1 - T)z_1z + y_1^2 - Tz_1^2 = 0. \end{cases}$$

Die dritte Polare ist eine Ebene, welche auf den Coordinatenaxen die (vom Anfangspunkt an gemessenen) Strecken

$$x_0 = -\frac{y_1^2 - Tz_1^2}{(Qx_1 - Sy_1)z_1^2},\quad y_0 = \frac{y_1^2 - Tz_1^2}{(Sx_1 - Ry_1)z_1^2 - y_1^2},$$

$$z_0 = -\frac{y_1^2 - Tz_1^2}{Qx_1^2 + Ry_1^2 - 2Sx_1y_1 - T}$$

abschneidet. α) Beachtet man, dass der Zähler dieser drei Brüche gleich Null gesetzt, die Gleichung der Tangentenebenen im Anfangspunkt der Coordinaten darstellt, so folgt:

„Bewegt sich der Pol auf einer der Tangentenebenen im Anfangspunkt der Coordinaten, so dreht sich die Polarebene um dem Ursprung."

β) Für $z_1 = 0$ ist die Gleichung (12a) der Polare:

$$y = -y_1.$$

Hieraus folgt:

„Befindet sich der Pol in der XY-Ebene auf der einen Seite der XZ-Ebene, so läuft die Polarebene auf der andern Seite parallel zur XZ-Ebene und hat von derselben den gleichen Abstand wie der Pol."

γ) Setzt man $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, so hat man aus (12a):

$$z = -z_1,$$

daher:

„Liegt der Pol auf dem einen Theil der Z-Axe, dann läuft die Polarebene der XY-Ebene parallel und schneidet den andern Theil der Z-Axe in einem Punkte, der mit dem

Pole gleichen Abstand vom Anfangspunkt der Coordinaten hat."

δ) Für $x_1 = \pm\sqrt{\frac{T}{Q}}$, $y_1 = 0$ geht die Gleichung (12a) über in

$$Qx - Sy \pm \sqrt{QT} = 0.$$

Da diese Gleichung von z_1 unabhängig ist, folgt:

„Die Tangentenebene ist in allen Punkten einer der beiden durch die Cuspidalpunkte der Doppellinie d hindurchgehenden Geraden (g) der Fläche dieselbe oder: Die Tangentenebene berührt die Fläche längs dieser Geraden."

Ferner folgt aus obiger Gleichung, dass die Tangentenebenen, welche die Fläche längs der beiden Geraden g berühren, einander parallel sind.

IV. Weiteres über Pole und Polaren.

α) Es werde die Ebene, deren Gleichung

$$x + my + nz = 0$$

ist, als Polarebene in Bezug auf die Fläche betrachtet. Durch Vergleichung der letzten Gleichung mit der Gleichung (12a) findet man, dass die Coordinaten eines zugehörigen Poles der Relation

$$y^2 - Tz^2 = 0$$

genügen müssen. Daher hat man den Satz:

„Geht eine Ebene durch den Ursprung, dann liegen die zugehörigen Pole auf den Tangentenebenen, welche die Fläche im Ursprung berühren."

β) Durch den Punkt (x^1, y^1, z^1) sei ein Ebenenbündel gelegt. Betrachtet man jede dieser Ebenen als Polarebene der Fläche F, so ist die Gleichung des geometrischen Ortes der Pole:

$$(Qx_1^2 + Ry_1^2 - 2Sx_1y_1 - T)z^1z_1 + (Qx^1 - Sy^1)x_1z_1^2 - (Sx^1 - Ry^1)y_1z_1^2 + y_1^2 - Tz_1^2 + y^1y_1 = 0,$$

in der x_1, y_1 als Variable zu betrachten sind.

Ein Vergleich dieser Gleichung mit (10a) lehrt:

a) „Dreht sich eine Polarebene der Fläche um einen festen Punkt, so ist der geometrische Ort der zugehörigen Pole diejenige erste Polare, deren Pol der feste Punkt ist."

b) „Lässt man einen Punkt sich auf einer ersten Polare der Fläche bewegen, so gehen alle zugehörigen Polarebenen durch den Pol der ersten Polare."

γ) Construirt man alle quadratischen Polaren der Fläche, die durch einen festen Punkt (x^1, y^1, z^1) hindurchgehen, so ist die Lage der zugehörigen Pole (x_1, y_1, z_1) bestimmt durch die Gleichung:

$$Qz^{1^2}x_1^2 - 2Sz^{1^2}x_1y_1 + (Rz^{1^2}+1)y_1^2 + 4(Qx^1 - Sy^1)z^1x_1z_1 - 4(Sx^1 - Ry^1)z^1y_1z_1 + (Qx^{1^2} + Ry^{1^2} - 2Sx^1y^1 - T)z_1^2 + 4y^1y_1 - 4Tz^1z_1 + y^{1^2} - Tz^{1^2} = 0.$$

Aus der Uebereinstimmung dieser Gleichung mit (11a) findet man:

„Der geometrische Ort der Pole aller zweiten Polaren, die durch einen festen Punkt (x^1, y^1, z^1) hindurchgehen, ist diejenige zweite Polare, deren Pol der Punkt (x^1, y^1, z^1) ist."

§. 5.

Doppelt berührende Tangentenkegel.

Man kann der Gleichung (8) der Fläche die Gestalt geben:

$$(13)\quad (yw + 2\lambda z^2)^2 = 4z^2[\lambda^2 z^2 + \lambda yw - \frac{1}{4}(Qx^2 + Ry^2 - 2Sxy - Tw^2)],$$

wo λ eine beliebige Constante ist.

Bestimmt man diese Constante nun so, dass die Gleichung

$$(14)\quad \lambda^2 z^2 + \lambda yw - \frac{1}{4}(Qx^2 + Ry^2 - 2Sxy - Tw^2) = 0$$

einen Kegel zweiten Grades darstellt, so ergeben sich für λ die drei Werte:

$$(15)\quad \lambda = 0,\ \lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{Q}(S^2 - QR)},\ \lambda = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{Q}(S^2 - QR)}.$$

Da die durch diese Werte von λ bestimmten Kegel die Fläche F doppelt einhüllen*), so dass jede Tangentenebene eines dieser Kegel die Fläche in zwei verschiedenen Punkten berührt, so folgt:

*) Vgl. Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Juli 1863. p. 335.

„Die Fläche besitzt drei doppelt berührende Tangentenkegel."

Die Coordinaten (x_0, y_0, z_0) der Mittelpunkte dieser Kegel ergeben sich als die gemeinsamen Wurzeln der Gleichungen:

$$(16)\qquad \begin{cases} Qx^2+Ry^2-2Sxy-4\lambda^2z^2+T=0, \\ Sx-Ry+2\lambda=0, \\ Qx-Sy=0. \end{cases}$$

Die Wurzeln sind:

für $\lambda=0$: (17a) $x_0=0,\ y_0=0,\ z_0=\infty$;

$$\text{für } \lambda=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{Q}(S^2-QR)}: (17b)\quad \begin{cases} x_0=-S\sqrt{\dfrac{T}{Q(S^2-QR)}}, \\ y_0=-\sqrt{\dfrac{QT}{S^2-QR}}; \\ z_0=0; \end{cases}$$

$$\text{für } \lambda=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{Q}(S^2-QR)}: (17c)\quad \begin{cases} x_0=S\sqrt{\dfrac{T}{Q(S^2-QR)}}, \\ y_0=\sqrt{\dfrac{QT}{S^2-QR}}, \\ z_0=0. \end{cases}$$

Die Wertsysteme (17b) und (17c) findet man noch auf eine andere Weise.

Bezeichnet man den auf der positiven Seite der X-Axe liegenden Cuspidalpunkt mit p_1, den auf der negativen Seite liegenden mit p_2; ferner die Cuspidalpunkte der Doppellinie d':

$$\begin{cases} Ry-(S-\sqrt{S^2-QR})x=0 \\ w=0 \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} Ry-(S+\sqrt{S^2-QR})x=0 \\ w=0 \end{cases}$$

respective mit $p^1{}_1$ und $p^1{}_2$, so sind die Gleichungen der Verbindungslinie

von p_1 und $p^1{}_1$: $\begin{cases} Ry-(S+\sqrt{S^2-QR})x-(S+\sqrt{S^2-QR})\sqrt{\dfrac{T}{Q}}=0 \\ z=0, \end{cases}$

$$\text{von } p_2 \text{ und } p^1{}_2\text{:} \begin{cases} Ry-(S-\sqrt{S^2-QR})x+(S-\sqrt{S^2-QR})\sqrt{\frac{T}{Q}}=0 \\ z=0, \end{cases}$$

$$\text{von } p_1 \text{ und } p^1{}_2\text{:} \begin{cases} Ry-(S-\sqrt{S^2-QR})x-(S-\sqrt{S^2-QR})\sqrt{\frac{T}{Q}}=0 \\ z=0, \end{cases}$$

$$\text{von } p_2 \text{ und } p^1{}_1\text{:} \begin{cases} Ry-(S+\sqrt{S^2-QR})x+(S+\sqrt{S^2-QR})\sqrt{\frac{T}{Q}}=0 \\ z=0. \end{cases}$$

Die Wurzeln der beiden ersten Gleichungspaare bilden das Wertsystem (17b), die der beiden letzten das System (17c).

Die Verbindungsgeraden $(\overline{p_1 p^1{}_1})$ und $(\overline{p_2 p^1{}_2})$ einerseits, $(\overline{p_1 p^1{}_2})$ und $(\overline{p_2 p^1{}_1})$ andererseits schneiden sich in dem Mittelpunkt je eines doppelt berührenden Kegels der Fläche.

Die Gleichungen der drei Kegel sind:

für $\lambda=0$:

$$Qx^2+Ry^2-2Sxy-T=0, \tag{18a}$$

für $\lambda=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{Q}(S^2-QR)}$:

$$Q(Qx^2+Ry^2-2Sxy-T)-T(S^2-QR)z^2 -2y\sqrt{QT(S^2-QR)}=0, \tag{18b}$$

für $\lambda=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{Q}(S^2-QR)}$:

$$Q(Qx^2+Ry^2-2Sxy-T)-T(S^2-QR)z^2 +2y\sqrt{QT(S^2-QR)}=0. \tag{18c}$$

Aus (18a) folgt:

„Die Tangentenebenen des Cylinders, welcher der Ort der Tangenten im Knotenpunkt (K) der Fläche ist, sind doppelt berührende Tangentenebenen."

In (15) sind die beiden letzten Werte von λ imaginär, wenn

$$\frac{T}{Q}(S^2-QR)=-\frac{K}{(P_1\xi^2+P_2\eta^2)(P_1{}^2\xi^2+P_2{}^2\eta^2)}$$

negativ ist. Dieser Fall kann unter vier Bedingungen eintreten:

α) Wenn P_1, P_2 und K sämmtlich positive Grössen sind;
β) wenn P_1, P_2 und K sämmtlich negativ sind;
γ) wenn bei entgegengesetzten Vorzeichen von P_1 und P_2 K positiv und zugleich $P_1\xi^2+P_2\eta^2>0$ ist;
δ) wenn bei entgegengesetzten Vorzeichen von P_1 und P_2 K negativ und $P_1\xi^2+P_2\eta^2\leq 0$ ist.

Da die beiden ins Auge gefassten Werte von λ entweder beide zugleich reell oder zugleich imaginär sind und im Falle, wo das Letztere stattfindet, auch die entsprechenden Berührungskegel (18b) und (18c) imaginär sind, so können wir sagen:

„Die Kegel (18b) und (18c) sind imaginär bei der Fläche F des Ellipsoids, und des Hyperboloids mit einem Mantel, wenn dessen reelle Axen in der XY-Ebene liegen. Liegen die Axen des letzteren in einer der beiden andern Coordinatenebenen, so ist, damit die Kegel imaginär werden, noch die Erfüllung der Bedingung $P_1\xi^2+P_2\eta^2>0$ erforderlich. Ferner sind die Kegel noch imaginär, wenn die Grundfläche ein Hyperboloid mit zwei Mänteln ist, dessen reelle Axe mit der X- oder Y-Axe zusammenfällt und zugleich die Bedingung $P_1\xi^2+P_2\eta^2\leq 0$ erfüllt ist."

In den Fällen, wo λ reell ist, muss man, um über die Realität der Kegel entscheiden zu können, noch die Vorzeichen der einzelnen Grössen Q, R, S, T berücksichtigen; dadurch werden aber die in den Grössen P_1, P_2 und K ausgedrückten Bedingungen, zu denen noch solche über die Grössen von ξ und η hinzukommen, zu complicirt als dass sie in dieser allgemeinen Weise untersucht zu werden verdienten.

§. 6.

Andere Eigenschaften der Fläche.

Mit Hülfe der Resultate unserer bisherigen Untersuchung sind wir im Stande aus den von Salmon und Cayley entdeckten Relationen zwischen den Singularitäten der Flächen noch eine Anzahl anderer, der Fläche zukommender Eigenschaften durch Rechnung zu finden.

Die Grössen, welche benutzt werden sollen, stelle ich zunächst hier zusammen.

n Ordnung der Fläche.
a Ordnung des Tangentenkegels von einem Punkte an die Fläche.
δ Zahl der Doppelkanten des Kegels.
$\varkappa$ Zahl der Rückkehrkanten desselben.
ϱ Classe der entwickelbaren Fläche, die von den Tangentialebenen längs der Doppelcurve gebildet wird.
σ Classe der entwickelbaren Fläche, die von den Tangentialebenen längs der Cuspidalcurve gebildet wird.
b Ordnung der Doppelcurve.
k Zahl ihrer scheinbaren Doppelpunkte.
f Zahl ihrer wirklichen Doppelpunkte.
t Zahl ihrer dreifachen Punkte.
j Zahl der Pinch- oder Cuspidalpunkte der Doppelcurve.
c Ordnung der Cuspidalcurve.
h Zahl ihrer scheinbaren Doppelpunkte.
ϑ Zahl von Punkten in ihr von unerklärter auf die Fläche bezüglicher Singularität.
ω Zahl ihrer off-points.
β Zahl der Durchschnittspunkte der Doppelcurve mit der Cuspidalcurve, welche in der letzteren stationär sind.
γ Zahl derjenigen Schnittpunkte der Doppelcurve mit der Cuspidalcurve, welche in der ersteren stationär sind.
i Zahl der Schnittpunkte, die in keiner von beiden Curven stationär sind.
C Zahl der gewöhnlichen Doppelpunkte der Fläche.
B Zahl der biplanaren Doppelpunkte.

Die entsprechenden Grössen der Reciprokalfläche der Fläche F bezeichnen wir durch Accente. Diejenigen, welche wir benutzen, sind, reciprok in Bezug auf die Fläche F definirt, folgende:

n' Classe der Fläche F.
a' Classe ihres Schnittes mit einer beliebigen Ebene.
δ' Zahl der Doppeltangenten ihres Querschnitts.
$\varkappa'$ Zahl der stationären Tangenten oder Inflexionen ihres Querschnitts.
b' Classe der entwickelbaren Fläche, die von den Doppeltangentialebenen gebildet wird.
c' Classe der entwickelbaren Fläche der stationären Tangentialebenen.

Von diesen Grössen sind uns nun folgende bekannt:

$$n=4,\ b=2,\ f=1,\ j=4,\ C=1,$$
$$\sigma=k=t=c=h=\vartheta=\omega=\beta=\gamma=i=B=0.$$

Die Werte der übrigen ergeben sich aus folgenden Gleichungen:*)

$$(19)\quad n'=n(n-1)^2-n(7b+12c)+4b^2+8b+9c^2+15c-8k-18l$$
$$+18\beta+12\gamma+12i-9t-2C-3B-3\vartheta.$$

Es folgt hieraus:

„Die Fläche ist von der zehnten Classe."

$$(20)\qquad \varrho=b(n-2)-3\beta-3\gamma-3t,$$

also:
$$\varrho=4.$$

Der Tangentenkegel von einem Punkte an die Fläche zerfällt in die beiden doppelt zu zählenden Ebenen, die den Punkt mit den beiden Doppelgeraden verbinden und einen Kegel, dessen Ordnung (a) sich aus der Gleichung

$$(21)\qquad a=n(n-1)-2b-3c$$

als die achte ergibt.

Mit Hülfe dieses Wertes hat man

$$(22)\qquad a'=a=8,$$

ferner aus

$$(23)\qquad \varkappa=a(n-2)+B-\varrho-2\sigma-3\omega,$$
$$\varkappa=12.$$

Die beiden Gleichungen

$$(24)\qquad n'-a(a-1)+2\delta+3\varkappa=0,$$
$$(25)\qquad c'-3a(a-2)+6\delta+8\varkappa=0$$

liefern, wenn man für a und $\varkappa$ die berechneten Werte einsetzt:

$$\delta=5,\quad c'=18.$$

Benutzt man noch diese letzten Werte, so erhält man, da

$$(26)\quad b'=\frac{1}{2}a(a-2)(a^2-9)-(a^2-a-6)(2\delta+3\varkappa)+2\delta(\delta-1)$$
$$+6\delta\varkappa+\frac{9}{2}\varkappa(\varkappa-1)$$

ist,
$$b'=14.$$

*) In Betreff der folgenden Gleichungen s. Salmon. Anal. Geom. d. Raumes. T. II. Art. 484 u. 487.

Aus

$$\varkappa' = 3n(n-2) - 6b - 8c \tag{27}$$

folgt

$$\varkappa' = 12.$$

Ferner aus

$$\delta' = \frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9) - (n^2-n-6)(2b+3c) + 2b(b-1) + 6bc + \frac{9}{2} c(c-1), \tag{28}$$

$$\delta' = 8.$$

Ausserdem kann noch die Relation

$$a(n-2)(n-3) - 2(\delta - C - 3\omega) - 3(ac - 3\sigma - \chi - 3\omega) - 2(ab - 2\varrho - j) = 0 \tag{29}$$

dazu dienen, die Richtigkeit der oben für die Cuspidalpunkte gefundenen Zahl zu bestätigen; denn man findet aus der letzten Gleichung ebenfalls

$$j = 4.$$

§. 7.

Die ebenen Schnitte der Fläche.

Wir wenden uns dazu, einige Eigenschaften, welche den verschiedenen ebenen Schnitten der Fläche zukommen, durch Rechnung zu finden.

1) Eine Ebene, welche die Fläche in der Weise schneidet, dass sie zu keiner Coordinatenebene parallel ist und ausserdem keinen der Cuspidalpunkte enthält, erzeugt eine Schnittcurve vierter Ordnung mit zwei Knotenpunkten, den Schnittpunkten der Ebene mit den beiden Doppelgeraden.

Bezeichnet man nun mit μ die Ordnung der Curve, mit ν ihre Classe, die Zahl ihrer Doppelpunkte durch δ, die Zahl ihrer stationären Punkte durch $\varkappa$, so sind bei der angegebenen Curve bekannt

$$\mu = 4, \quad \delta = 2, \quad \varkappa = 0$$

und man erhält aus der Plücker'schen Gleichung*)

*) Vgl. Salmon. Höhere Curven. Art. 67.

(30) $$\nu = \mu(\mu-1) - 2\delta - 3\varkappa$$

als die höchste Zahl der Tangenten, die von einem Punkt aus an die Curve gezogen werden können

$$\nu = 8.$$

Es sei ferner ι die Anzahl der Inflexionspunkte der Curve. Man erhält dann aus einer andern Gleichung*) Plückers:

(31) $$\iota = 3\mu(\mu-2) - 6\delta - 8\varkappa$$

als Zahl für die Inflexionspunkte

$$\iota = 12.$$

2) Es gehe die Ebene, während über ihre sonstige Lage dieselbe Voraussetzung wie bei 1) gemacht wird, durch einen Cuspidalpunkt der Fläche. Dann ist gegeben:

$$\mu = 4, \quad \delta = 1, \quad \varkappa = 1$$

und man erhält aus (30)

$$\nu = 7,$$

aus (31) $$\iota = 10.$$

3) Enthält die Ebene zwei Cuspidalpunkte, die nicht auf derselben Doppelgeraden liegen, so ist

$$\mu = 4, \quad \delta = 0, \quad \varkappa = 2,$$

also

$$\nu = 6, \quad \iota = 8.$$

4) Liegen die beiden Cuspidalpunkte auf derselben Doppelgeraden, so zerfällt die Schnittcurve in die Gerade und einen Kegelschnitt.

5) Enthält die schneidende Ebene alle vier Cuspidalpunkte, so muss sie in Curven niederer Ordnung zerfallen. Sie zerfällt in die beiden Doppelgeraden.

6) Geht die Ebene durch den Knotenpunkt der Fläche, d. h. steht sie senkrecht zur XY-Ebene ohne einen Cuspidalpunkt zu

*) Vgl. Salmon. Höhere Curven. Art. 77.

enthalten, so besitzt die Schnittcurve drei Knotenpunkte. Es ist also

$$\nu=6,\ \iota=6.$$

7) Tritt an die Stelle eines der drei Knotenpunkte ein Cuspidalpunkt, so hat man

$$\nu=5,\ \iota=4.$$

8) Werden zwei Knotenpunkte durch zwei Cuspidalpunkte ersetzt, die nicht auf derselben Doppelgeraden liegen, dann ist

$$\nu=4,\ \iota=2.$$

9) Liegen die zwei Cuspidalpunkte auf der nämlichen Doppelgeraden, so enthält der bei 4) erwähnte Kegelschnitt einen Knotenpunkt, d. h. er zerfällt in zwei gerade Linien, nämlich die Geraden g oder g''', je nachdem die beiden Cuspidalpunkte, durch welche die Ebene hindurchgeht, auf der Doppelgeraden d oder d' liegen.

Um die Gleichung des Kegelschnitts zu erhalten, den eine durch die X-Axe hindurchgehende Ebene ausschneidet, denken wir uns das Coordinatensystem um einen Winkel ϑ $(0<\vartheta<\pi)$ gedreht, während die X-Axe die Drehungsaxe ist und der Anfangspunkt der Coordinaten seine Lage beibehält. Nennt man die neuen Coordinaten der Fläche x', y', z' und setzt man in der auf das neue Coordinatensystem bezogenen Gleichung der Fläche

$$z'=0,$$

so erhält man als Gleichung des Kegelschnitts

$$(32)\quad Qx^{1^2}+R\cos^2\vartheta y^{1^2}-2S\cos\vartheta x^1y^1+\cot g^2\vartheta-T=0.$$

Dieser Kegelschnitt ist eine Ellipse, wenn

$$(S^2-QR)\cos^2\vartheta=-\frac{P_1P_2\cos^2\vartheta}{(P_1^2\xi^2+P_2^2\eta^2)^2}$$

negativ ist, d. h. wenn P_1 und P_2 dasselbe Vorzeichen haben, eine Hyperbel, wenn der Ausdruck positiv ist, d. h. P_1 und P_2 entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Hieraus folgt:

α) „Jede durch die Doppelgerade d hindurchgehende und gegen die Ebene der beiden Doppelgeraden unter einem

schiefen Winkel geneigte Ebene schneidet aus der Fläche F einer und derselben Fläche zweiter Ordnung einen Kegelschnitt derselben Gattung aus und zwar entweder eine Ellipse oder eine Hyperbel."

β) „Jeder in dieser Weise erzeugte Kegelschnitt ist eine Ellipse bei der Fläche F des Ellipsoids, des Hyperboloids mit einem Mantel, dessen reelle Axen in der XY-Ebene liegen, und des Hyperboloids mit zwei Mänteln, dessen reelle Axe mit der Z-Axe zusammenfällt."

γ) „Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel bei der Fläche F des Hyperboloids mit einem Mantel, wenn dessen reelle Axen in der XZ- oder YZ-Ebene liegen, und des Hyperboloids mit zwei Mänteln, dessen reelle Axe mit der Axe der x oder der y zusammenfällt."

δ) „Die Doppelgerade ist ein Durchmesser des Kegelschnitts."

Die Gleichung des Kegelschnitts ist für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$

$$Qx^{12} - T = 0,$$

d. h. der Kegelschnitt zerfällt in die Geraden g.

Legt man die schneidende Ebene durch die Doppelgerade d' hindurch, also parallel zur XY-Ebene, so ist die Gleichung des entstehenden Kegelschnitts

$$(33)\quad P_1(h^2 + P_1\xi^2)x^2 + P_2(h^2 + P_2\eta^2)y^2 - 2P_1P_2\xi\eta xy - Kh^2 = 0,$$

wo h die Grösse der Entfernung der schneidenden Ebene von der XY-Ebene angibt.

Die Gleichung (33) stellt dar

die vier Geraden g'', wenn $h^2 = -(P_1\xi^2 + P_2\eta^2)$,

eine Ellipse, wenn $h^2 > -(P_1\xi^2 + P_2\eta^2)$,

eine Hyperbel, wenn $0 < h^2 < -(P_1\xi^2 + P_2\eta^2)$ ist.

Daraus folgt: Wenn der Bedingung

$$P_1\xi^2 + P_2\eta^2 \geqq 0$$

genügt wird, ist jeder zur XY-Ebene parallele Schnitt eine Ellipse. Ist aber

$$P_1\xi^2 + P_2\eta^2 < 0,$$

dann sind alle Schnitte für $0 < h^2 < -(P_1\xi^2 + P_2\eta^2)$ Hyperbeln,

für $h^2 > -(P_1\xi^2 + P_2\eta^2)$ Ellipsen; für $h^2 = -(P_1\xi^2 + P_2\eta^2)$ und $h = 0$ gerade Linien.

Mit Rücksicht auf die verschiedenen Flächen, die diesen Fällen entsprechen, haben wir daher das Resultat:

„Die zur XY-Ebene parallelen Schnitte sind sämmtlich Ellipsen bei der Fläche F des Ellipsoids für jede Lage des Punktes M (in der XY-Ebene); ferner bei der Fläche F des Hyperboloids mit einem Mantel, wenn dessen reelle Axen in der XZ- oder YZ-Ebene liegen, und des Hyperboloids mit zwei Mänteln, wenn dessen reelle Axe mit der Axe der x oder der y zusammenfällt, und wenn in den letzten vier Fällen die Coordinaten des Punktes M der Bedingung $P_1\xi^2 + P_2\eta^2 \geqq 0$ genügen." „Wenn dagegen dieser Bedingung nicht genügt wird oder die Fläche F zur Grundfläche ein Hyperboloid mit einem Mantel hat, dessen reelle Axen in der XY-Ebene liegen, oder ein Hyperboloid mit zwei Mänteln, dessen reelle Axe mit der Z-Axe zusammenfällt, dann ist jeder zur XY-Ebene parallele Schnitt, dessen Ebene von jener (nach beiden Seiten hin gemessen) um eine kleinere Strecke als $\sqrt{-(P_1\xi^2 + P_2\eta^2)}$ entfernt ist, eine Hyperbel; für diesen Grenzwert geht die Hyperbel in zwei Gerade über; jeder ferner liegende Schnitt ist eine Ellipse."

Aus der Gleichung (33) ergibt sich unmittelbar, dass nicht bei jeder der betrachteten Flächen F alle diese Schnittcurven reell sind.

Berücksichtigt man die verschiedenen Formen, welche die Gleichung (33) dadurch erhält, dass man den Grössen P_1, P_2 und K die verschiedenen Vorzeichen beilegt, und zugleich, dass in der Gleichung (2) der Fläche die Variable z nur in der zweiten Potenz vorkommt, so ergibt sich in Bezug auf die allgemeine Gestalt der Fläche Folgendes:

Jede Fläche F besteht aus zwei Teilen, die symmetrisch zur XY-Ebene liegen.

Bei der Fläche F des Ellipsoids und des Hyperboloids mit einem Mantel stossen diese beiden Teile in der XY-Ebene zusammen und erstrecken sich nach beiden Seiten der z ins Unendliche.

Bei der Fläche F des Hyperboloids mit zwei Mänteln, dessen reelle Axe mit der Z-Axe zusammenfällt, stossen die beiden Teile ebenfalls in der XY-Ebene zusammen, aber die ganze Fläche liegt zwischen den beiden Ebenen

$$z = +\xi\sqrt{P_1} \text{ und } z = -\xi\sqrt{P_1}, \text{ wenn } P_1\xi^2 - P_2\eta^2 > 0,$$

oder

$$z = +\eta\sqrt{P_2} \text{ und } z = -\eta\sqrt{P_2}, \text{ wenn } P_1\xi^2 - P_2\eta^2 < 0$$

ist.

Die beiden Teile der Fläche F des Hyperboloids mit zwei Mänteln, dessen reelle Axe mit der X-Axe zusammenfällt, stehen um die Strecken

$$z = +\xi\sqrt{P_1} \text{ und } z = -\xi\sqrt{P_1};$$

wenn die reelle Axe mit der Y-Axe zusammenfällt, um die Strecken

$$z = +\eta\sqrt{P_2} \text{ und } z = -\eta\sqrt{P_2}$$

von der XY-Ebene ab und erstrecken sich nach den beiden Seiten der z ins Unendliche.

§. 8.

Weiteres über die Gestalt der Fläche.

Wir gehen von der Gleichung (33) aus, indem wir sie zu den Hauptaxen des Kegelschnitts, den sie darstellt, als Coordinatenaxen transformiren. Sie erhält dadurch die Gestalt:

$$[\chi(h) + \psi(h)]x^2 + [\chi(h) - \psi(h)]y^2 = 2Kh^2, \tag{34}$$

wo

$$\begin{cases} \chi(h) = (P_1 + P_2)h^2 + P_1^2\xi^2 + P_2^2\eta^2, \\ [\psi(h)]^2 = 4P_1^2P_2^2\xi^2\eta^2 + [(P_1 - P_2)h^2 + P_1^2\xi^2 + P_2^2\eta^2]^2 \end{cases} \tag{35}$$

ist.

Mit Hülfe der Gleichung (34) erhält man die Längen der Halbaxen (m, n) des Kegelschnitts aus den Gleichungen:

$$m^2 = \frac{2Kh^2}{\chi(h) + \psi(h)}, \quad n^2 = \frac{2Kh^2}{\chi(h) - \psi(h)}. \tag{36}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt

für $h=0$: $\qquad m=0$

und mit Hülfe der bekannten Regeln zur Berechnung des Wertes von $\frac{0}{0}$

$$n^2=\frac{K(P_1^2\xi^2+P_2^2\eta^2)}{P_1P_2(P_1\xi^2+P_2\eta^2)},$$

für $h^2=-(P_1\xi^2+P_2\eta^2)$:

$$m^2=\infty,\quad n^2=\frac{K(P_1\xi^2+P_2\eta^2)}{P_1P_2(\xi^2+\eta^2)},$$

für $h^2=\infty$:

$$m^2=\frac{K}{P_1},\quad n^2=\frac{K}{P_2}.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ist ersichtlich:

„Bewegt sich der Punkt M auf der XY-Ebene fort, so sind die auf den so entstehenden Flächen F einer und derselben Grundfläche liegenden Kegelschnitte, deren Ebenen im Unendlichen liegen und der Ebene des Doppelkegelschnitts parallel sind, einander congruent."

Um das Verhältnis der Lage der Axen zur Grösse der Entfernung der Ebene des Kegelschnitts zu erhalten, stellen wir die Gleichung der Hauptaxen des Kegelschnitts auf. Sie ist

$$(37)\qquad y^2-\frac{(P_1-P_2)h^2+P_1^2\xi^2-P_2^2\eta^2}{P_1P_2\xi\eta}xy-x^2=0.$$

Hieraus ergeben sich als Gleichungen der einzelnen Axen:

$$(37a)\qquad y=x\left[\varphi(h)+\sqrt{1+[\varphi(h)]^2}\right],$$

$$(37b)\qquad y=x\left[\varphi(h)-\sqrt{1+[\varphi(h)]^2}\right],$$

wo $\varphi(h)=\frac{(P_1-P_2)h^2+P_1^2\xi^2-P_2^2\eta^2}{2P_1P_2\xi\eta}$ ist.

Für $h=0$ folgt aus (37a)

$$y=\frac{P_1\xi}{P_2\eta}x,$$

aus 37(b)

$$y = -\frac{P_2\eta}{P_1\xi}x.$$

Für $h^2=\infty$, wenn $P_1-P_2>0$ ist,
aus (37a): $x=0$,
aus (37b): $y=0$;
wenn $P_1-P_2<0$ ist,
aus (37a): $y=0$,
aus (37b): $x=0$.

Aus den Gleichungen für $h^2=\infty$ folgt, wenn wir den letzten Satz berücksichtigen:

„Bewegt sich der Punkt M auf der Ebene der beiden Doppelgeraden, so haben alle Flächen F einer und derselben Grundfläche, welche dadurch entstehen, die Kegelschnitte, welche im Unendlichen liegen und deren Ebene der Ebene der Doppelgeraden parallel ist, gemeinsam."

Aus der Gleichung (35) ergab sich eine Aenderung der Länge der Axen des Kegelschnitts, wenn sich die Entfernung der Ebene desselben von der XY-Ebene ändert. Aus den Gleichungen (37) folgte, dass sich auch die Lage der Axen zur XZ- und YZ-Ebene änderte, und zwar so, dass, während h^2 von Null bis ins Unendliche wächst, die Tangente des Neigungswinkels der einen Axe gegen die XZ-Ebene von $\frac{P_1\xi}{P_2\eta}$ bis ∞ resp. 0 sich ändert. Da nun der Wert der Tangente, wenn er sich von $\frac{P_1\xi}{P_2\eta}$ bis ∞ vergrössert, kein Mal durch die Null hindurchgeht oder, wenn er bis zur Null abnimmt, kein Mal unendlich gross wird, so folgt:

Wenn $P_1-P_2>0$ ist, geht mit dem Wachsen des h^2 von 0 bis ∞ die Drehung der Axen in der Richtung vom positiven Teile der X-Axe gegen den positiven Teil der Y-Axe hin vor sich; wenn $P_1-P_2<0$ ist, erfolgt die Drehung im entgegengesetzten Sinne.

Indem man bedenkt, dass die Doppelgerade d' für jede Lage des Punktes M dieselbe ist und die Doppelgerade d dieselbe ist für alle Punkte M, deren Coordinaten (ξ, η) dem Quotienten $\frac{P_1\xi}{P_2\eta}$ denselben Wert verleihen, hat man den Satz:

„Bewegt sich der Punkt M auf einer durch den Ursprung hindurchgehenden Geraden der XY-Ebene, dann haben alle Flächen F einer und derselben Grundfläche, welche dadurch entstehen, ausser den im Unendlichen liegenden Kegelschnitten, deren Ebene der XY-Ebene parallel ist, noch die beiden Doppelgeraden gemeinsam."

Wir betrachten noch zwei specielle Lagen des Punktes M.

1) Es sei $\eta = 0$.

In den Gleichungen (36) ist dann

$$\chi(h) = (P_1 + P_2)h^2 + P_1{}^2\xi^2,$$
$$[\psi(h)]^2 = [(P_1 - P_2)h^2 + P_1{}^2\xi^2]^2,$$

also (36)

$$m^2 = \frac{Kh^2}{P_1(h^2 + P_1\xi^2)}, \quad n^2 = \frac{K}{P_2}.$$

Liegt also der Punkt M auf der X-Axe, so ist die eine Axe sämmtlicher Kegelschnitte der Fläche, deren Ebenen der XY-Ebene parallel sind, von constanter Länge und zwar so lang, wie die eine Axe des Kegelschnitts, den die XY-Ebene aus der zur Fläche F gehörigen Grundfläche zweiter Ordnung ausschneidet.

Die andere Axe ändert, während die Ebene des Kegelschnitts sich aus der XY-Ebene bis ins Unendliche entfernt, ihre Länge von Null bis zur Grösse der andern Axe des Kegelschnitts, den die XY-Ebene aus der entsprechenden Originalfläche ausschneidet.

In der Gleichung (37) ist

$$\varphi(h) = \infty,$$

daher ist

(37a): $x = 0$, (37b): $y = 0$.

Hieraus folgt:

„Bewegt sich der Punkt M auf der X-Axe, so haben die Axen aller auf den so entstehenden Flächen liegenden Kegelschnitte, deren Ebenen der XY-Ebene parallel sind, gegen die Schnittlinien der Ebenen mit der XZ- und YZ-Ebene eine constante Lage und zwar liegt die Axe eines jeden Kegelschnitts, deren Länge sich mit der Entfernung der Ebene desselben nicht ändert, in der YZ-Ebene, während die andere Axe in der XZ-Ebene liegt. Die Doppelgerade d fällt bei allen Flächen mit der Y-Axe zusammen."

Dasselbe gilt, wenn der Punkt M die Y-Axe durchläuft und man die bei dieser Bewegung entstehenden Flächen ins Auge fasst, jedoch mit dem Unterschied, dass die Axe des Kegelschnitts, deren Länge für jede Entfernung des Kegelschnitts von der XY-Ebene constant ist, in der XZ-Ebene, die andere in der YZ-Ebene liegt, während die Doppelgerade d mit der X-Axe zusammenfällt.

Es ergibt sich dies aus den Formeln (36) und (37), wenn man in ihnen

2) $\xi = 0$ setzt.

Denn in (36) ist dann

$$\chi(h) = (P_1 + P_2)h^2 + P_2{}^2\eta^2,$$
$$[\psi(h)]^2 = [(P_1 - P_2)h^2 + P_2{}^2\eta^2]^2,$$

also

$$m^2 = \frac{Kh^2}{P_1h^2 + P_2{}^2\eta^2}, \quad n^2 = \frac{K}{P_2}.$$

Die Länge der Axe n ist daher unabhängig von h und η. Wächst h^2 von 0 bis ∞, so ändert sich m^2 von 0 bis $\frac{K}{P_1}$. Die Gleichung der Doppelgeraden d ist

$$y = 0;$$

die Gerade fällt also mit der X-Axe zusammen. Die Axen der Kegelschnitte, welche bei allen gleich gross sind, liegen also in der XZ-Ebene; folglich die andern in der YZ-Ebene.

Ein besonderer Fall der Fläche F möge noch Erwähnung finden, nämlich der, dass

$$P_1 = P_2$$

ist, wobei jedoch vom Vorzeichen abgesehen wird.

Die Originalfläche zweiter Ordnung ist dann eine Rotationsfläche.

In den Gleichungen (37a) und (37b) ist in diesem Falle

$$\varphi(h) = \pm \frac{\xi^2 - \eta^2}{2\xi\eta},$$

wo das + sich auf den Fall bezieht, dass die dem absoluten Werte nach gleichen Grössen P_1 und P_2 das nämliche Vorzeichen haben, das — auf den Fall, wo sie entgegengesetztes Vorzeichen haben, wodurch die Gleichungen übergehen in

$$(37a) \qquad y = \frac{\xi}{\eta} x \text{ resp.} = \frac{\eta}{\xi} x,$$

$$(37b) \qquad y = -\frac{\eta}{\xi} x \text{ resp.} = -\frac{\xi}{\eta} x.$$

Hieraus folgt:

„Ist die Grundfläche zweiter Ordnung eine Rotationsfläche, die durch Rotation eines Kegelschnitts um die Z-Axe erzeugt werden kann, so haben alle Kegelschnitte, die auf der zugehörigen Fläche F liegen und deren Ebenen der XY-Ebene parallel sind, eine solche Lage, dass je eine Axe des einen Kegelschnitts je einer irgend eines andern Kegelschnitts parallel ist."

„Die eine Axenschaar ist parallel der Verbindungslinie des Punktes M mit dem Ursprung, die andere zu dieser Richtung senkrecht bei der Fläche F des Rotationsellipsoids, des Rotationshyperboloids mit einem Mantel, dessen reelle Axen in der XY-Ebene liegen, und des Rotationshyperboloids mit zwei Mänteln, dessen reelle Axe mit der Z-Axe zusammenfällt."

„Die Winkel, welche diese Axen mit der XZ- und der YZ-Ebene machen, werden zu 360° ergänzt durch die Neigungswinkel der Axen derjenigen Kegelschnitte, welche auf der Fläche F des Rotationshyperboloids mit einem Mantel liegen, dessen reelle Axen in der XZ- oder der YZ-Ebene liegen, oder auf der Fläche F, deren Grundfläche ein Rotationshyperboloid mit zwei Mänteln ist, dessen reelle Axe mit der X-Axe oder der Y-Axe zusammenfällt."

„Bei der zuerst genannten Flächenschaar liegt die Doppelgerade d senkrecht zur Verbindungslinie des Ursprungs mit dem Punkt M; ihre Lage bei den andern Flächen ergibt sich aus dieser, wie sich oben die Lage der Axen der einen Kegelschnitte aus der Lage der Axen der andern ergab."

„Die in unendlicher Ferne liegenden Kegelschnitte sind Kreise, die congruent sind denjenigen, welche die XY-Ebene aus der Grundfläche zweiter Ordnung ausschneidet."

Zum Schluss sei noch erwähnt, dass die Fläche F irgend einer Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung, deren Mittelpunkt nicht auf der Fläche liegt, noch auf zwei andere Weisen erzeugt werden kann, wie sich unmittelbar aus der Betrachtung der auf der Fläche liegenden Kegelschnitte ergibt; nämlich durch Rotation eines veränderlichen Kegelschnitts um die Doppellinie d, dann auch durch Verschiebung eines veränderlichen Kegelschnitts, dessen Ebene der XY-Ebene stets parallel bleibt und dessen Mittelpunkt die Z-Axe beschreibt.